Problemas Resueltos
de Geometría Elemental

Roberto Gutiérrez-Herrera, B.Sc.
Licenciatura en Matemática Aplicada, USAC
wrgutierrez@ing.usac.edu.gt

Resumen

Las siguientes páginas contienen la resolución de 13 problemas tomados del libro *Apuntes de Geometría* del Ing. José Saquimux, el cual hace un tiempo fue la base para enseñar la `Unidad de Geometría` del curso de **Matemática Básica 1** (Precálculo) del *Departamento de Matemática* de la Facultad de Ingeniería de la USAC.

El objetivo del mismo es presentar al estudiante, problemas de geometría distintos a los simples cálculos de perímetros, áreas y volúmenes —como se los enseñaron y aprendieron en el Nivel Medio—, sino dar una faceta más dinámica de lo que pueden ser la **Geometría**, y de forma general las MATEMÁTICAS.

Palabras claves y frases: Geometría elemental, LaTeX 2_ε.

Problema 1.
A partir de la figura 1, plantear ecuaciones que relacionen los lados de triángulos rectángulos, a través del *teorema de Pitágoras*, expresar la longitud de la mediana m_x correspondiente al lado x en función de sus lados x, y, z.

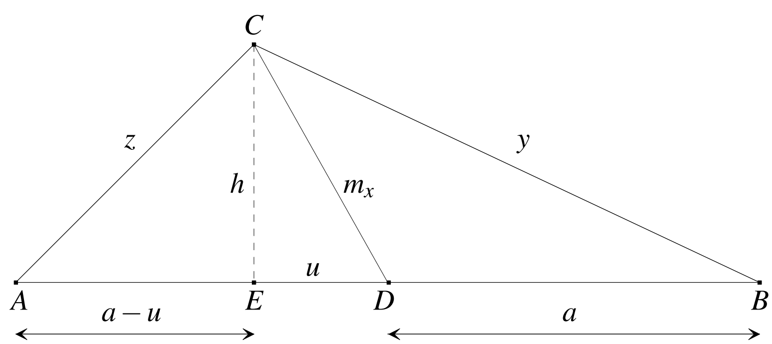

Figura 1: Aquí $AD = a$, $DB = a$, $AE = a - u$.

Solución. Se tendrá la relación $2a = x$ de donde $a = x/2$, con incógnitas m_x, h, u. Para $\triangle ACD$ tenemos:

$$z^2 = h^2 + (a-u)^2, \tag{1}$$
$$m_x^2 = u^2 + h^2, \tag{2}$$

y para $\triangle CED$

$$y^2 = h^2 + (a+u)^2. \tag{3}$$

Al restar (1) de (3) tenemos

$$\begin{aligned} y^2 - z^2 &= (a+u)^2 - (a-u)^2 \\ &= 4au \\ &= 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot u \end{aligned}$$

de esto

$$u = \frac{y^2 - z^2}{2x}. \tag{4}$$

De lo cual obtenemos

$$h^2 = y^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{y^2 - z^2}{2x}\right)^2, \tag{5}$$

sustituyendo (4) y (5) en (2) tenemos

$$m_x^2 = \left(\frac{y^2 - z^2}{2x}\right)^2 + \left[y^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{y^2 - z^2}{2x}\right)^2\right]$$

y finalmente

$$m_x = \frac{\sqrt{2(y^2 + z^2) - x^2}}{2}. \qquad \diamondsuit$$

Problema 2.
Deduzca que los triángulos $\triangle GNP$, $\triangle AGN$ & $\triangle AGP$ tienen área igual a un tercio del área del triángulo $\triangle NAP$.

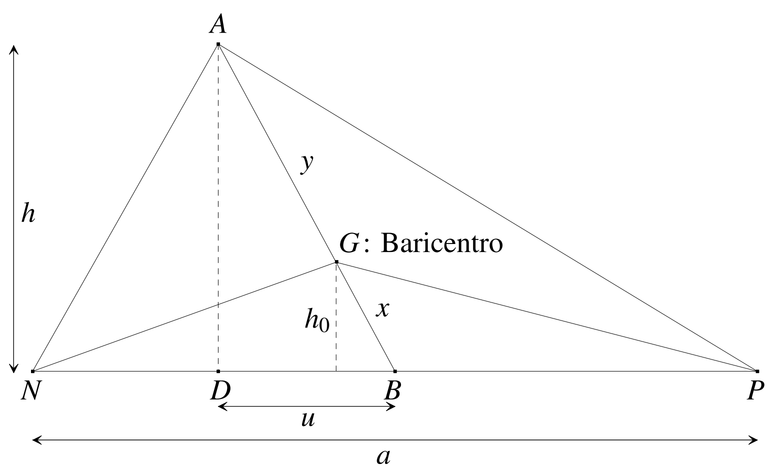

Figura 2: Mediana AB respecto al lado a.

Solución. De la figura 2 tenemos $AB = x + y$, $2x = y$ y $AB = 3x$, y de esto $\text{Área}_{\triangle ANP} = \frac{ah}{2}$ y $\text{Área}_{\triangle GNP} = \frac{ah_0}{2}$. Se buscará h_0 a partir de $\triangle ABD$:

$$\frac{h}{h_0} = \frac{x+y}{x}$$

es decir $h_0 = \frac{h}{3}$, sustituyendo

$$\begin{aligned}
\text{Área}_{\triangle GNP} &= \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{3} \\
&= \frac{ah}{2} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{\text{Área}_{\triangle ANP}}{3}.
\end{aligned}$$

Para $\text{Área}_{\triangle AGN}$ tenemos $\text{Área}_{\triangle AGN} = \text{Área}_{\triangle ABN} - \text{Área}_{\triangle BGN}$, es decir

$$\begin{aligned}
\text{Área}_{\triangle AGN} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h_0 \\
&= \frac{ah}{4} - \frac{a}{4} \cdot \frac{h}{3} \\
&= \frac{ah}{6} \\
&= \frac{\text{Área}_{\triangle ANP}}{3}.
\end{aligned}$$

Para $\text{Área}_{\triangle AGP}$ tenemos $\text{Área}_{\triangle AGP} = \text{Área}_{\triangle ANP} - \text{Área}_{\triangle GNP} - \text{Área}_{\triangle AGN}$, es decir

$$\begin{aligned}
\text{Área}_{\triangle AGP} &= \text{Área}_{\triangle ANP} - \frac{\text{Área}_{\triangle ANP}}{3} - \frac{\text{Área}_{\triangle ANP}}{3} \\
&= \frac{\text{Área}_{\triangle ANP}}{3}.
\end{aligned}$$

◇

Problema 3.
A partir del triángulo rectángulo de la figura 3, muestre que los triángulos $\triangle ADC$, $\triangle ABC$ & $\triangle BDC$ son semejantes entre si. Asimismo, mostrar el *teorema de las alturas*, es decir, $h = \sqrt{mn}$.

Solución. De $\triangle ABC$ tenemos:

$$h^2 + m^2 = x^2 \tag{6}$$

de $\triangle BCD$:

$$h^2 + n^2 = y^2 \tag{7}$$

y de $\triangle ACD$: $x^2 + y^2 = z^2$, es decir

$$x^2 + y^2 = (m+n)^2. \tag{8}$$

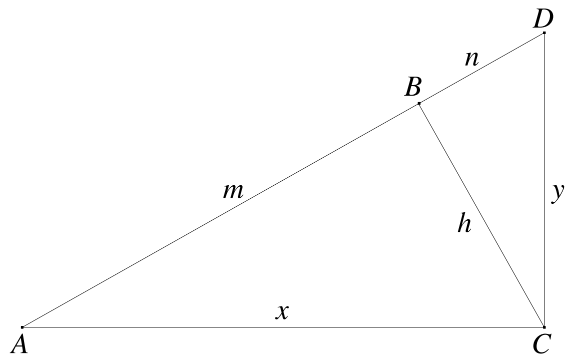

Figura 3: En este caso $z = m + n$.

Al sumar (6) con (7) y luego de utilizar (8):

$$\begin{aligned} 2h^2 + m^2 + n^2 &= x^2 + y^2 \\ &= (m+n)^2 \\ &= m^2 + 2mn + n^2 \\ 2h^2 &= 2mn \\ h &= \sqrt{mn}. \end{aligned}$$

Como $\triangle ACD$ y $\triangle BCD$ son rectángulos y tienen vértice común en D:

$$\begin{aligned} \frac{z}{y} &= \frac{y}{n} \\ y^2 &= nz \\ y &= \sqrt{nz}. \end{aligned}$$

Como $\triangle ACD$ y $\triangle ABC$ son rectángulos y tienen vértice común en A:

$$\begin{aligned} \frac{z}{x} &= \frac{x}{m} \\ x^2 &= mz \\ x &= \sqrt{mz}. \end{aligned}$$

Además $\frac{z}{x} = \frac{y}{h}$, de donde

$$h = \frac{xy}{z}. \qquad \diamondsuit$$

Problema 4.
En la figura 4, sea BD la bisectriz del ángulo $\angle ABC$, aquí $z = m + n$.

- ▶ Deduzca el *teorema de la bisectriz*, es decir $\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$.
- ▶ Deducir que: $n = \frac{yz}{x+y}$, $m = \frac{xz}{x+y}$.

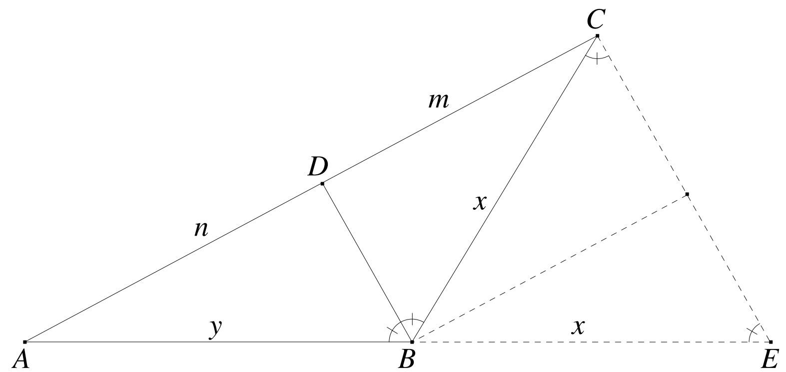

Figura 4: Triángulo y segmentos auxiliares.

Solución. Sea CE tal que $BD \parallel CE$, en donde BE es la prolongación de AB. Se tendrá que $\triangle ABD$ y $\triangle AEC$ son semejantes:

$$\begin{aligned} \frac{y}{n} &= \frac{y+BE}{n+m} \\ &= \frac{y+BE}{z} \\ n &= \frac{yz}{y+BE}. \end{aligned}$$

Por construcción

$$\angle BEC = \angle ABD \tag{9}$$

y además $\angle ABD + \angle DBC + \angle CBE = 2\pi$, por definición de bisectriz tenemos

$$\begin{aligned} \angle ABD &= \angle DBC \\ 2 \cdot \angle ABD + \angle CBE &= 2\pi \end{aligned} \tag{10}$$

por otro lado $\angle BCE + \angle BEC + \angle BCE = 2\pi$, sustituyendo los resultados (9) y (10):

$$\begin{aligned} [2\pi - 2 \cdot \angle ABD] + \angle ABD + \angle BCE &= 2\pi \\ \angle BCE &= \angle ABC \end{aligned}$$

de donde $\triangle BCE$ es *isósceles*, de esto, lados opuestos a ángulos iguales son también iguales

$$\begin{aligned} BE &= x \\ n &= \frac{yz}{x+y} \end{aligned} \tag{11}$$

trazando una paralela al segmento AC a través del punto B, tenemos para los triángulos semejantes (que se obtienen):

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+y} &= \frac{m}{m+n} \\ &= \frac{m}{z} \\ m &= \frac{xz}{x+y} \end{aligned} \tag{12}$$

al dividir la igualdad (12) en (11)

$$\frac{m}{n} = \frac{xz/(x+y)}{yz/(x+y)}$$
$$\frac{m}{n} = \frac{x}{y}. \qquad \diamondsuit$$

Problema 5.
Deduzca la relación que expresa la longitud de la bisectriz correspondiente al ángulo opuesto al lado de longitud x. Usar la figura 5.

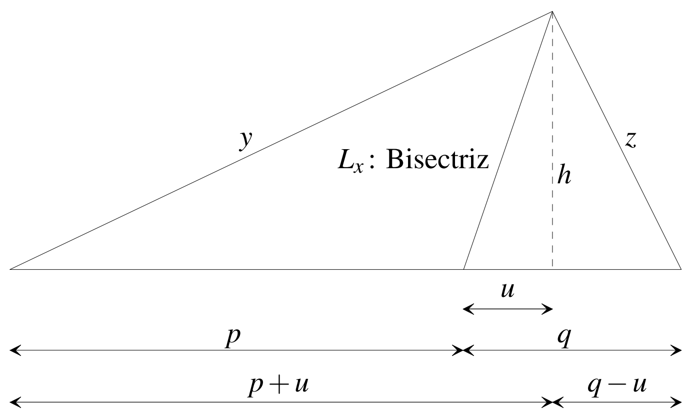

Figura 5: En este caso $x = p+q = (p+u)+(q-u)$.

Solución. De los triángulos rectángulos tenemos

$$z^2 = h^2 + (q-u)^2, \tag{13}$$
$$L_x^2 = h^2 + u^2, \tag{14}$$
$$y^2 = h^2 + (p+u)^2. \tag{15}$$

Restando (13) de (15)

$$\begin{aligned} y^2 - z^2 &= (p+u)^2 - (q-u)^2 \\ &= x(p-q+2u) \end{aligned} \tag{16}$$

de las igualdades (11) y (12) obtenemos $p = \frac{xy}{y+z}$, $q = \frac{xz}{y+z}$ de donde

$$p - q = x\left(\frac{y-z}{y+z}\right)$$

sustituyendo en (16)

$$y^2 - z^2 = x\left[x\left(\frac{y-z}{y+z}\right) + 2u\right],$$
$$u = \frac{(y-z)\left[(y+z)^2 - x^2\right]}{2x(y+z)}.$$

al despejar h^2 de (13) y sustituir en (14), al desarrollar

$$\begin{aligned} L_x^2 &= u^2 + z^2 - (q^2 - 2qu + u^2) \\ &= z^2 - q^2 + 2qu \end{aligned}$$

sustituyendo para u y q

$$L_x^2 = z^2 - \left(\frac{xz}{y+z}\right)^2 + 2\left(\frac{xz}{y+z}\right)\left[\frac{(y-z)\left[(y+z)^2 - x^2\right]}{2x(y+z)}\right]$$

de donde

$$L_x = \frac{\sqrt{yz\left[(y+z)^2 - x^2\right]}}{y+z}. \qquad \diamondsuit$$

Problema 6.
Una cadena de transmisión de torca, une dos ruedas dentadas de radios R y r. Si la distancia entre sus centros es $D > R + r$ y están sobre la horizontal, exprese su longitud en términos de sus radios, la distancia que separa sus centros y del ángulo α.

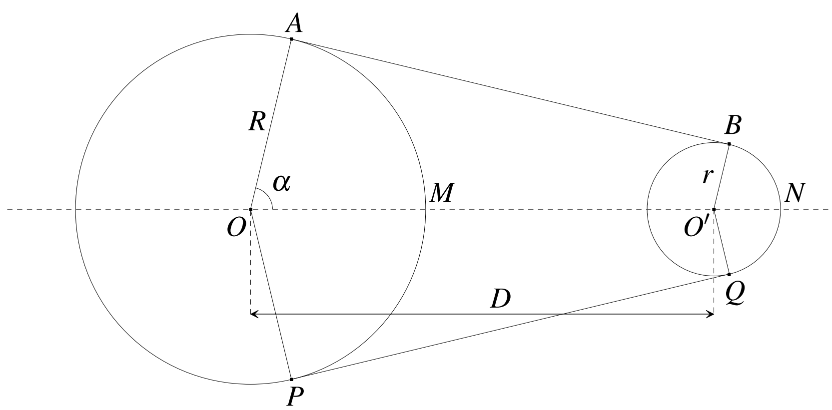

Figura 6: Sea $\beta = \angle MOP$.

Solución. Los ángulos se medirán en radianes. Como los segmentos AB y PQ son tangentes a las circunferencias, se tendrá que éstos son perpendiculares con respecto a los radios de las mismas, es decir

$$AB \perp OA, \quad AB \perp O'B, \quad PQ \perp OP, \quad PQ \perp O'Q.$$

A partir de la figura 7 tenemos $OA \parallel O'B$ y $OP \parallel O'Q$, por consiguiente

$$\angle BO'N = \alpha, \quad \angle NO'Q = \beta,$$

mostraremos: $\beta = \alpha$ y $PQ = AB$.

De $\triangle AOC$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{D+O'C}{R} &= \frac{O'C}{r},\\ O'C &= \frac{rD}{R-r}.\end{aligned}$$

De $\triangle POC'$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{D+O'C'}{R} &= \frac{O'C'}{r},\\ O'C' &= \frac{rD}{R-r},\\ O'C' &= O'C.\end{aligned}$$

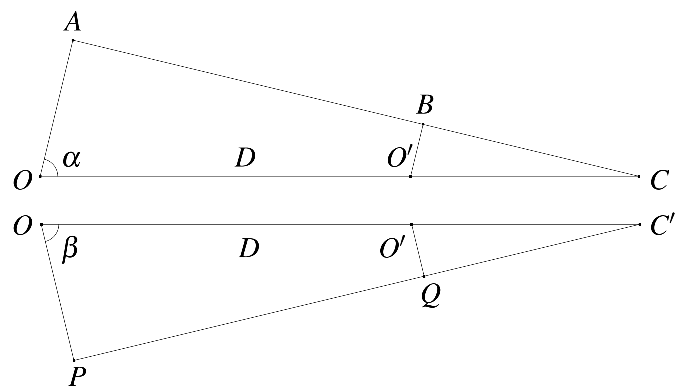

Figura 7: Triángulos auxiliares.

Es decir, al prolongar los segmentos AB y PQ se interceptan en un mismo punto sobre la prolongación del segmento OO' —que une los centros de las circunferencias—, con esto los triángulos rectángulos $\triangle AOC$ y $\triangle POC'$ son congruentes, de donde $\beta = \alpha$ ($\angle MOP = \alpha$) y $PQ = AB$.

Sea L_c la longitud de la cadena, entonces a partir de la figura 6

$$\begin{aligned}L_c &= 2AB + (2\pi R - 2\alpha R) + 2\alpha r\\ &= 2\big[AB + \pi R + \alpha(r-R)\big], \qquad (17)\end{aligned}$$

se buscará una expresión para AB. De $\triangle BO'C$ tenemos

$$\begin{aligned}r^2 + (BC)^2 &= \left(\frac{rD}{R-r}\right)^2\\ BC &= \frac{r}{R-r}\sqrt{D^2-(R-r)^2}, \qquad (18)\end{aligned}$$

para $\triangle AOC$ y al hacer uso de (18)

$$\begin{aligned}R^2 + (AB+BC)^2 &= (D + \frac{rD}{R-r})^2\\ AB &= \sqrt{D^2-(R-r)^2} \qquad (19)\end{aligned}$$

sustituyendo (19) en (17) se obtiene lo pedido

$$L_c = 2\left[\sqrt{D^2 - (R-r)^2} + \pi R + \alpha(r-R)\right]. \qquad \diamondsuit$$

Problema 7.
El triángulo de la figura 8 es isósceles con base igual a 20. Determinar la distancia entre los puntos de tangencia A y B, si $EC = 8$.

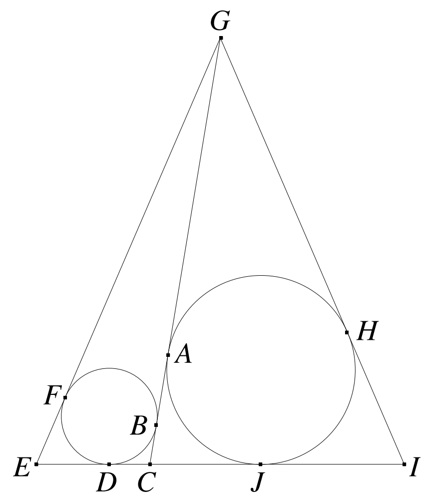

Figura 8: Puntos auxiliares A, B, C, D, E, F, G, H, I, J.

Solución. Como el triángulo es isósceles, se tendrá

$$EG = GI, \quad EI = 20, \quad EC = 8, \quad CI = 12.$$

Asimismo, $AB = AC - BC$, $AB = GB - AG$. Partiendo del hecho que segmentos tangentes a una circunferencia que se interceptan en un punto, tienen igual longitud, se tiene para los triángulos $\triangle CGI$ y $\triangle CEG$ las igualdades siguientes:

$$\triangle CGI\colon \begin{cases} 12 = IJ + JC, \quad AG = GH, \quad HI = IJ, \\ GI = GH + HI, \quad JC = AC. \end{cases}$$

$$\triangle CEG\colon \begin{cases} 8 = CE + ED, \quad BC = CD, \quad DE = EF, \\ EG = EF + FG, \quad FG = GB. \end{cases}$$

Dado que $EG = GI$ tenemos

$$\begin{aligned} EF + FG &= GH + HI \\ DE + GB &= AG + IJ \\ GB - AG &= IJ - DE \\ AB &= IJ - DE \end{aligned}$$

Asimismo, de $GC = CG$ se obtiene

$$GB + BC = AG + AC$$
$$GB - AG = AC - BC$$

de donde

$$\begin{aligned} AB &= JC - CD \\ &= (12 - IJ) - (8 - DE) \\ &= 4 - (IJ - DE) \\ &= 4 - AB \\ &= 2 \end{aligned}$$

♢

Problema 8.
Al hacer variar el ángulo α, la altura h, el lado x, el área y el perímetro del trapecio cambian.

- ¿Cuál es el valor de α para que el área del trapecio sea máxima?
- ¿Cuál es el valor de α para que el perímetro del trapecio sea máximo?
- ¿Cuál es el valor de x que corresponde al área máxima?

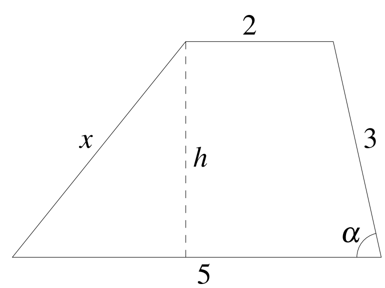

Figura 9: Trapecio.

Solución. El área del trapecio es

$$A = \frac{2+5}{2}h$$
$$A(h) = \frac{7}{2}h, \quad 0 \le h \le 3$$

una función lineal creciente en h, por lo cual su máximo se alcanza en $h = 3$, es decir cuando $\alpha = \pi/2$. Con esto, se encontrará el valor de x, con el ángulo dado se formará un triángulo rectángulo de altura 3 y base $5 - 2 = 3$, de esto $3^2 + 3^2 = x^2$ de donde

$$x = 3\sqrt{2} \quad (x \approx 4.2426).$$

Perímetro del trapecio $P(x) = 2 + 3 + 5 + x = 10 + x$, una función lineal en x, se encontrará el recorrido de la misma. Dado que existe la relación $x = x(\alpha)$:

1. Si $\alpha = 0$ entonces $x = 0$ y $P = 10$.
2. Si $\alpha = \pi/2$ entonces $x = 3\sqrt{2}$ y $P \approx 14.243$.
3. Si $\alpha = \pi$ entonces $x = 6$ y $P = 16$.

De donde $0 \leq P \leq 16$ con esto, el ángulo que maximiza el perímetro es π. $\diamondsuit$

Problema 9.
¿Existe un cilindro circular recto con *volumen* $1\,\mathrm{m}^3$ y *área superficial* $1\,\mathrm{m}^2$? ¿Qué tipo de ecuación queda si se desea determinar sus dimensiones?

Solución. Supongamos que existe este cilindro. Entonces las funciones del volumen y área superficial del cilindro son

$$V = \pi r^2 h; \tag{20}$$
$$A_{\text{sup}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h. \tag{21}$$

Dado que $V = 1$ y $A_{\text{sup}} = 1$, sustituyendo se obtiene

$$h = \frac{1}{\pi r^2};$$
$$1 = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1}{\pi r^2}\right);$$
$$0 = 2\pi r^3 - r + 2.$$

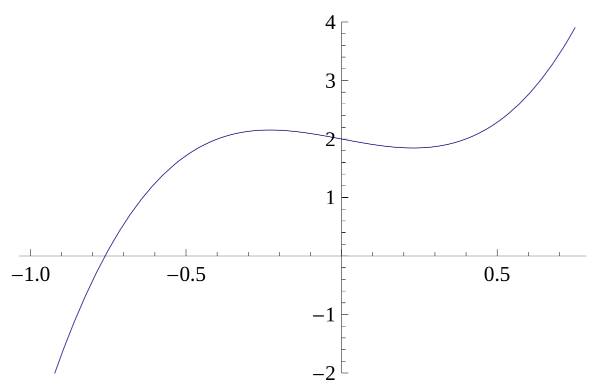

Figura 10: Gráfica del polinomio.

En donde el polinomio cúbico tiene como única raíz real $r \approx -0.76019\,\mathrm{m}$, una distancia negativa no puede ser posible, en consecuencia **no existe tal cilindro**. $\diamondsuit$

Problema 10.
Un cubo de lado L está inscrito en una esfera, la esfera está inscrita en un cono cuyo diámetro es igual a su generatriz, el cono está inscrito en un cilindro circular recto. Expresar el área total y el volumen del cilindro en términos de L.

Solución. Como los radios que unen los vértices del cuadrado con el centro de la circunferencia forman un ángulo recto, se tendrá

$$\begin{aligned} r^2 + r^2 &= L^2 \\ r &= \frac{\sqrt{2}}{2}L. \end{aligned} \tag{22}$$

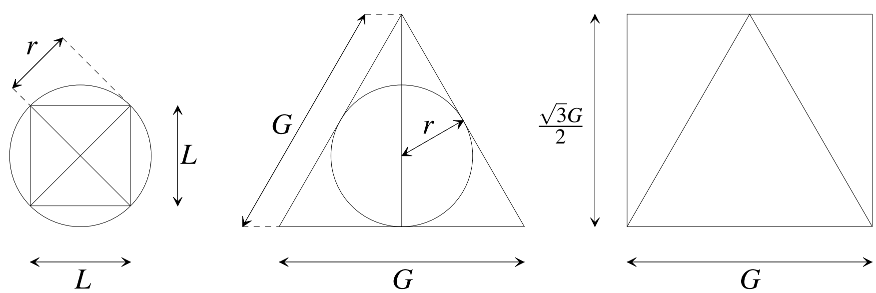

Figura 11: Vistas laterales del cubo, esfera, cono y cilindro.

Al cortar el triángulo equilátero por un segmento de recta a través de uno de sus vértices, pasando por el centro de la circunferencia, se tendrá un triángulo rectángulo con catetos $\frac{G}{2}$, $\frac{\sqrt{3}G}{2}$ e hipotenusa G. Asimismo, al trazar un radio por el punto de tangencia entre la circunferencia y uno de los lados del triángulo equilátero, obtenemos un triángulo rectángulo semejante al anterior, con hipotenusa $\frac{\sqrt{3}G}{2} - r$ y cateto r, y al hacer uso de (22)

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}G/2 - r}{G} &= \frac{r}{G/2} \\ G &= \sqrt{6}L \end{aligned} \tag{23}$$

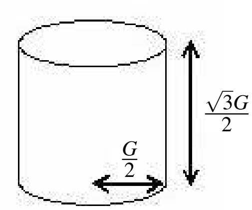

Figura 12: Cilindro exterior.

De las igualdades (20) y (21) y la figura 12, tendremos para el área superficial

$$\begin{aligned} A_{\text{sup}} &= 2\pi\left(\frac{G}{2}\right)^2 + 2\pi\left(\frac{G}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}G}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\pi G^2 \\ &= 3(1+\sqrt{3})\pi L^2 \end{aligned}$$

para el volumen

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\left(\frac{G}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}G}{2}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}\pi G^3\\
&= \frac{9\sqrt{2}}{4}\pi L^3
\end{aligned}
\qquad \diamondsuit
$$

Problema 11.

Un depósito cilíndrico de radio 5 in y altura 10 in contiene aceite exactamente a su mitad. Dicho depósito se coloca horizontalmente, en ese momento inicia a salir aceite del depósito por un agujero. Se sabe que el nivel de aceite decrece con una rapidez de 2 in/min.

- ▶ Exprese el área de la superficie del aceite en función de la altura.
- ▶ Exprese el área de la superficie del aceite en función del tiempo.
- ▶ ¿A los cuántos minutos el tanque quedará vacío?

Solución. Como la altura inicial es de 5 in y la razón de cambio es negativa, la altura en función del tiempo (en minutos) será

$$h(t) = 5 - 2t. \tag{24}$$

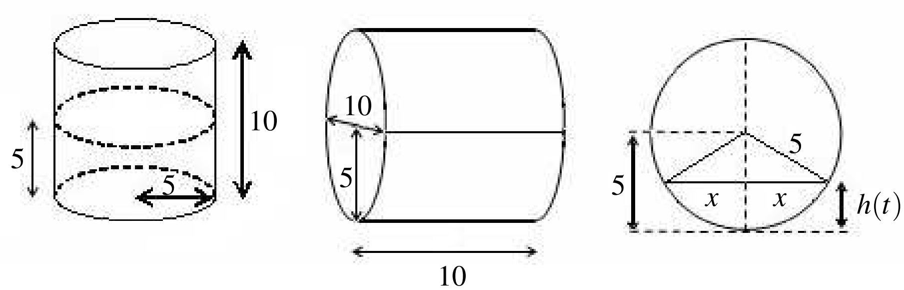

Figura 13: Distintas vistas del cilindro.

Sea t_v el tiempo necesario para vaciar el depósito, de esto $h(t_v) = 0$, de donde $0 = 5 - 2t$, es decir $t_v = 2.5$ min. La superficie del aceite será un rectángulo de longitud constante igual a 10 y ancho variable —siguiendo la tercer vista en la figura 13— igual a $2x$, de esto $\mathrm{A}_{\mathrm{sup}} = 10(2x) = 20x$; se encontrará una función entre h y x. De la tercer vista, se tiene

$$
\begin{aligned}
5^2 &= x^2 + (5-h)^2;\\
x &= \sqrt{10h - h^2}, \quad 0 \le h \le 5;\\
\mathrm{A}_{\mathrm{sup}}(h) &= 20\sqrt{10h - h^2}, \quad 0 \le h \le 5.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

ahora sustituyendo (24) en (25) se llega a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_{\mathrm{sup}}(t) &= 20\sqrt{10(5-2t) - (5-2t)^2}\\
&= 20\sqrt{25 - 4t^2}, \quad 0 \le t \le 2.5.
\end{aligned}
\qquad \diamondsuit
$$

Problema 12.
Determinar el radio de la circunferencia en la figura 14, si el área sombreada es igual a $3\,\mathrm{cm}^2$.

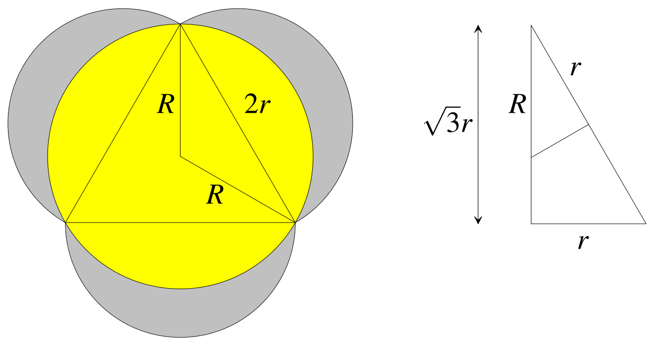

Figura 14: Área sombreada en gris.

Solución. Este tipo de problemas se resuelven a través del método de suma y resta de las áreas de figuras. Para tal fin, tenemos la siguiente notación:

$\mathrm{A}_{\mathrm{som}}:$ área sombreada. $\mathrm{A}_{\mathrm{te}}:$ área del triángulo equilátero.
$\mathrm{A}_{\mathrm{sc}}:$ área del semicírculo. $\mathrm{A}_{\mathrm{sm}}:$ área del círculo mayor.

Planteamos la ecuación de áreas, en donde $\mathrm{A}_{\mathrm{som}} = 3$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{som}} = \mathrm{A}_{\mathrm{te}} + 3\,\mathrm{A}_{\mathrm{sc}} - \mathrm{A}_{\mathrm{cm}} \tag{26}$$

al calcular las áreas por separado

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cm}} = \pi R^2; \tag{27}$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{sc}} = \frac{\pi}{2} r^2; \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{\mathrm{te}} &= \frac{\sqrt{3}}{4}(2r)^2, \\ &= \sqrt{3} r^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Se buscará una expresión que relacione las variables r y R, en el triángulo auxiliar se aprecian dos triángulos rectángulos semejantes, con esto

$$\frac{R}{r} = \frac{2r}{\sqrt{3} r}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} R \tag{30}$$

sustituyendo (30) en (28) y (29) respectivamente

$$\mathrm{A}_{\mathrm{sc}} = \frac{3\pi}{8} R^2; \tag{31}$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{te}} = \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2. \tag{32}$$

sustituyendo los valores (27), (31) y (32) en (26), obtenemos al reducir términos

$$R = \sqrt{\frac{24}{\pi + 6\sqrt{3}}}. \qquad \diamondsuit$$

Problema 13.
Exprese el área sombreada en la figura 15 en términos del parámetro a.

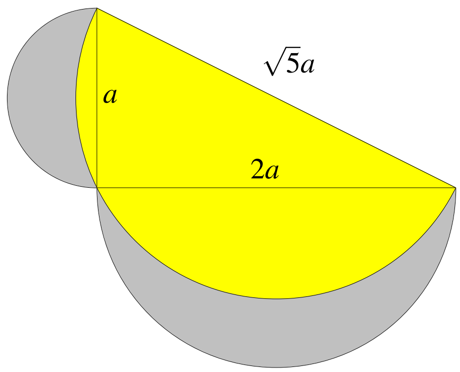

Figura 15: Área sombreada en gris.

Solución. Al seguir el método usado en el problema anterior, se tendrá (Con una notación semejante.)

$$\mathrm{A}_{\mathrm{som}} = \mathrm{A}_a + \mathrm{A}_{2a} + \mathrm{A}_{\mathrm{tr}} - \mathrm{A}_{\mathrm{sc}} \tag{33}$$

en donde

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_a &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2, & \mathrm{A}_{2a} &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 2a\right), \\ &= \frac{\pi}{8}a^2; & &= \frac{\pi}{2}a^2; \\ \mathrm{A}_{\mathrm{sc}} &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}a\right)^2, & \mathrm{A}_{\mathrm{tr}} &= \frac{1}{2}(2a\cdot a), \\ &= \frac{5}{8}\pi a^2; & &= a^2. \end{aligned}$$

Al sustituir y reduciendo términos obtenemos

$$\mathrm{A}_{\mathrm{som}} = a^2. \qquad \diamondsuit$$

El único fin de la ciencia
es la honra de la mente humana.
CARL GUSTAV JACOB JACOBI